

Mécanique quantique- Contrôle continu N° 2  
SM- SMI 3

I- Soit un opérateur linéaire A ayant un vecteur propre  $|\phi\rangle$  avec la valeur propre a.  
Soit un deuxième opérateur linéaire B tel que :  $[A,B] = B + 2BA^2$   
Montrer que  $(B|\phi\rangle)$  est vecteur propre de A avec la valeur propre qu'on déterminera.

$$[A,B]|\phi\rangle = (B + 2BA^2)|\phi\rangle$$

$$AB|\phi\rangle - BA|\phi\rangle = B|\phi\rangle + 2BA^2|\phi\rangle$$

$$A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$$

$$A(B|\phi\rangle) - Ba|\phi\rangle = B|\phi\rangle + 2Ba^2|\phi\rangle$$

$$A(B|\phi\rangle) - a(B|\phi\rangle) = B|\phi\rangle + 2a^2(B|\phi\rangle)$$

$$A(B|\phi\rangle) = (a + 1 + 2a^2)(B|\phi\rangle)$$

$B|\phi\rangle$  est bien vecteur propre de A avec la valeur propre  
 $(1 + a + 2a^2)$

II- Un oscillateur harmonique est initialement dans l'état :  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\{2|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle\}$

Où  $|\psi_n\rangle$  sont les solutions de l'équation de Schrödinger pour  $V(X) = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$

Si vous mesurez l'énergie du système, quelles sont les énergies permises ainsi que les probabilités pour obtenir chacune d'elle.

On rappelle que :  $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$  avec  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$

Vue l'expression de  $|\psi\rangle$ , seules les énergies  $E_2$  et  $E_3$  correspondantes  
(respectivement)  $|\psi_2\rangle$  et  $|\psi_3\rangle$  sont permises

$$E_2 = \hbar\omega(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

$$E_3 = \hbar\omega(3 + \frac{1}{2}) = \frac{7}{2}\hbar\omega$$

$$\text{Probabilité d'avoir } E_2 = P(E_2) = |\langle\psi_2|\psi\rangle|^2 = \frac{4}{5}$$

$$\text{Probabilité d'avoir } E_3 = P(E_3) = |\langle\psi_3|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{5}$$

III- On considère le potentiel  $V(x)$  suivant :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 & \text{(région 1)} \\ -V_0 & \text{si } 0 < x < a & \text{(région 2)} \\ +\infty & \text{si } x > a & \text{(région 3)} \end{cases} \quad V_0 \text{ et } a \text{ sont des constantes positives.}$$

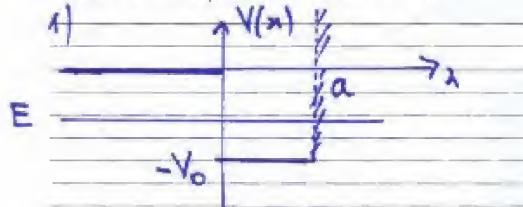
On s'intéressera seulement aux états liés pour lesquels l'énergie totale  $-V_0 < E < 0$

1- Représenter la courbe  $V(x)$ .

2- Résoudre l'équation de Schrödinger dans les différentes zones.

On posera:  $k_1 = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$  et  $k_2 = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

3- Ecrire les équations de continuité



1)  $x < 0 : V(x) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi_1''(x) = E \phi_1(x)$$

$$\phi_1''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi_1(x) = 0$$

$$\phi_1''(x) - k_2^2 \phi_1(x) = 0$$

$$\phi_1(x) = A e^{k_2 x} + B e^{-k_2 x}$$

Comme  $\phi_1(x)$  doit être bornée,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_1(x) = 0 : B = 0$$

il reste:  $\phi_1(x) = A e^{k_2 x}$

\*  $0 < x < a$ :

$$\phi_2''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) \phi_2(x) = 0$$

$$\phi_2(x) = C e^{ik_1 x} + D e^{-ik_1 x}$$

\*  $x > a$

$$\phi_3(x) = 0$$

la barrière est infinie, la particule ne peut pas exister dans cette région.

3) on a:

i)  $\phi_1(0) = \phi_2(0) \Leftrightarrow A = C + D$

ii)  $\phi_1'(0) = \phi_2'(0) \Leftrightarrow A k_2 = i k_1 (C - D)$

iii)  $\phi_2(a) = \phi_3(a) \Leftrightarrow$

$$C e^{ik_1 a} + D e^{-ik_1 a} = 0$$